Förderung mathematisch oder naturwissenschaftlich besonders begabter und interessierter Schüler

In letzter Zeit wird dem begabten Schüler in der öffentlichen Diskussion immer mehr Aufmerksamkeit zuteil. Der Förderverein hat sich mit diesem Thema bereits auf seiner Hauptversammlung in Saarbrücken Ostern 1984 beschäftigt und Maßnahmen beraten. Wir wollen uns hiermit nicht an die derzeitige Entwicklung anhängen, sondern betrachten es als unsere ureigenste Aufgabe, alle Schüler, also auch die besonders begabten und interessierten, zu fördern. Dabei denken wir in erster Linie an die Schüler der Mittelstufe, da für höhere Klassenstufen andere, gut eingespielte Förderungskonzepte existieren, an denen im übrigen viele unserer Mitglieder intensiv beteiligt sind.

Die Förderung dieser Schülergruppen ist im normalen Unterricht nur ansatzweise zu leisten. Alle bisherigen Erfahrungen zeigen nämlich, daß zur Durchführung eines Unterrichts mit innerer Differenzierung vorstrukturierte Materialien notwendig sind, welche die einzelnen Lernschritte methodisch weitgehend vorher festlegen. Genau dies ist aber nicht der geeignete Weg, um den begabten Schülern zu helfen. Hierzu sind andere methodische Mittel erforderlich, die nach unserer Auffassung zur Zeit am besten im Rahmen von schulischen oder überschulischen Schülerzirkeln realisierbar sind.

Wir fordern daher dazu auf, an allen Schulen, wo dies möglich ist, Schülerzirkel für interessierte und talentierte Schüler einzurichten. Wir bitten Schulleitungen und Schulbehörden nachdrücklich, diese Schülerzirkel als zusätzliche freiwillige Unterrichtsveranstaltungen anzuerkennen und die dafür nötigen Stunden auf die Pflichtstundenzahl der betreuenden Lehrer anzurechnen, so wie das heute schon für Arbeitsgemeinschaften möglich ist.

Der Förderverein bietet für die Arbeit in solchen Schülerzirkeln konkrete Hilfen. So werden in MNU zunächst für das Fach Mathematik geeignete Aufgaben und Probleme jeweils auf einer MNU-Seite in lockerer Folge erscheinen. Die Lösungen oder Lösungswege sollen in der Regel angegeben werden. Gut gelungene andere Lösungswege können in einem späteren Heft veröffentlicht werden. Später sollen entsprechende Aufgabenseiten für die Fächer Physik, Chemie und Biologie folgen. Die Federführung für die Gestaltung dieser Seiten haben die Fachbeisitzer in Zusammenarbeit mit den Fachschriftleitern übernommen. Dabei ist nicht daran gedacht, daß nur die Fachbeisitzer die Aufgaben auswählen und beschreiben. Erwünscht sind auch Beiträge von Kolleginnen und Kollegen oder von bereits bestehenden Schülerzirkeln. Interessenten wenden sich bitte an die Fachbeisitzer. Wir beginnen im vorliegenden Heft mit einem Aufsatz von Herrn Professor Kiesswetter, der sich dem speziellen Problem der Hochbegabtenförderung widmet und das Hamburger Modell sehr ausführlich erläutert. Herr Professor Kiesswetter ist auch verantwortlich für die erste Aufgabenseite. Wir hoffen auf eine gute Resonanz.

Für den Vorstand
Horst Lochhaas

[Aus: MNU 38 (1985) 300]

K. Kiesswetter:

Die Förderung von mathematisch besonders begabten und interessierten Schülern - ein bislang vernachlässigtes sonderpädagogisches Problem

Mit Informationen über das Hamburger Modell

Einleitende Bemerkungen

Auch hochbegabte Schüler gehören zu einer der Minderheiten, welche im normalen Unterricht kaum zu ihrem Recht kommen; auch hochbegabte Schüler sollten deshalb durch sonderpädagogische Maßnahmen eigens gefördert werden. Im Ausland - und zwar in Ost und West - gibt es schon länger und vielenorts Unternehmungen in dieser Richtung. Es ist an der Zeit, daß auch wir in der Bundesrepublik Deutschland uns zu geeigneten Fördermaßnahmen entschließen. Denken, Planen und Handeln müssen dabei der Verantwortung gegenüber den davon unmittelbar oder mittelbar betroffenen Personen und Gruppen gerecht werden. Nötig sind Sachbezogenheit, pädagogisches Engagement und gleichzeitig kritische Distanz, schädlich sind Ideologien und unkritisches Mitläufertum.

Im folgenden berichte ich über ein interdisziplinäres Forschungsprojekt, das seit 1981 von Wissenschaftlern der Fachbereiche Psychologie, Mathematik und Erziehungswissenschaft der Universität Hamburg vorbereitet wurde und sich die „Identifizierung und Förderung von mathematisch besonders befähigten Schülern“ als Aufgabe gestellt hat. Innerhalb dieses Projekts werden inzwischen etwa 100 Mittelstufenschüler, welche in der Regel aus der 7. oder 8. Klassenstufe kommen, besonders betreut und beobachtet. Da ich als der Fachdidaktiker des Forschungsteams wesentlich für die Entwicklung eines der beiden von uns für die Auswahl verwendeten Tests, für das Förderkonzept sowie für die Arbeitsmaterialien zuständig bin, soll der Leser von mir erfahren - auch wenn hier nur in groben Zügen -, wie ich die Situation im üblichen Mathematikunterricht einschätze und wie ich die sonstigen Vorgaben für meine Arbeit sehe.

Die Gründe für das Versagen des heutigen Schulsystems gegenüber den Hochbegabten sind vielschichtig und von der unterschiedlichsten Art. Insbesondere macht man es sich zu leicht, wenn man sich die Lehrer als die bevorzugten Prügelknaben aussucht. Lehrer können nicht all die Wunder verrichten, welche manch praxisferne Unterrichtsplanung von ihnen erwartet. Jedoch wäre es töricht, die Lehrer, welche ja die Schlüsselfiguren des Unterrichtsgeschehens sind, bei einer Bestandsanalyse auszusparen.

Ich betrachte es als Naturgesetz, daß ein Lehrer dann, wenn er sich einer Gruppe von Schülern besonders annimmt, andere automatisch vernachlässigt. So ist das viel benutzte Vorstrukturieren und Zerlegen in kleine Portionen - für Unkritische das didaktische Heilmittel par excellence - sicher geeignet, den meisten Schülern den Lernprozeß (momentan) zu erleichtern; Hochbegabten schmeckt solcherart vorgekaute Mathematik in sehr vielen Fällen gar nicht.

Mathematik wird in der Regel als Rezeptsammlung unterrichtet. Und wahrscheinlich ist dies auch die Art, mit der man die meisten Schüler in der kürzesten Zeit mit den meisten Inhalten und Verfahrensweisen vertraut machen kann. Für Hochbegabte ist solcherart Unterricht ungeeignet, da sie dann die kreative Komponente ihrer Begabung nicht ausleben können, und da sie nicht lernen, mit ihren Ideen umzugehen, diese kritisch zu fassen und in (korrekte) Formulierungen, Theorien usw. einfließen zu lassen.

Der mathematikerfahrene Leser ist sicher mit mir einig, daß die Gruppe der hochbegabten Schüler nicht identisch mit der Gruppe derer ist, welche besonders schnell und fehlerfrei Terme umformen können (selbstverständlich gibt es einen größeren Durchschnitt). Auch schreiben mathematisch hochbegabte Schüler nicht immer die besten Klassenarbeiten, vor allem dann, wenn bei der Benotung (und auch bei der Auswahl der Aufgaben) das Fehlen von Fehlern als wichtigstes oder sogar als einziges Kriterium benutzt wird.

Der Lehrer braucht eine gewisse Sensibilität, um Hochbegabungen erkennen zu können. Er sollte sich mathematisch engagieren und Erfahrungen mit eigener Kreativität und Produktivität zumindest im elementarmathematischen Bereich gesammelt haben. Er weiß dann, daß Mathematik ein Prozeß ist, in der Entstehungsphase oft mit fehlerhaften ersten Formulierungen und meist erst in der Endphase mit einfachen und klaren Lösungen, welche in sehr vielen Fällen nur auf dem Umweg über kompliziertere Lösungen und manchmal sogar nur über mühsam korrigierte Fehlleistungen zu erreichen sind. Auch für den normalen Unterricht ist es verhängnisvoll, wenn der Lehrer nur das Problem und dessen einfache Lösung (aus Büchern) kennt, aber nicht den Weg dorthin. Die Folge ist eine falsche Erwartungshaltung dem Schüler gegenüber, auch dem hochbegabten, dessen erste gute Ideen nicht als solche erkannt werden, da sie nicht in das beschränkte Bild passen.

Der ideologisch betriebene Streit zwischen jenen, welche darauf schwören, daß Begabung angeboren, und jenen, welche mit allen Mitteln - auch mit „wissenschaftlichen“ - zu beweisen versuchen, daß Begabung ausschließlich das Ergebnis eines Sozialisationsprozesses darstellt, ist unsinnig und schädlich wie jede auf solche Weise betriebene Auseinandersetzung. Ich gehe davon aus, daß jeder Mensch auch im geistigen Bereich nicht vorhersagbare Anlagen bei der Geburt zur Verfügung gestellt bekommt, welche danach nicht mehr beliebig veränderbar sind, jedoch in einem gewissen Umfang entwickelt und in bestimmte Richtungen gesteuert werden können. Ich enthalte mich wohlweislich der Versuchung, die Anteile aneinander zu messen.

Die Diskussion darüber, ob jungen besser für Mathematik begabt sind als Mädchen, ist leider ebenfalls stark ideologiebefrachtet. Um nicht gleich mißverstanden und angegriffen zu werden, stelle ich deshalb zuerst fest, daß ich zu dieser Problematik keine wissenschaftlich einigermaßen gesicherte Erkenntnisse vorzuweisen habe. Andererseits deuten die Erfahrungen aus unseren Testungen (und die Ergebnisse von Testungen in Amerika) auf folgenden Sachverhalt hin: Bei 12- bis 13jährigen (bei uns: Gymnasiasten und Gesamtschüler) und auch etwas älteren Mittelstufenschülern schneiden jungen und Mädchen bei durchschnittlichen Anforderungen nicht signifikant verschieden ab. Also: Mädchen sind mathematisch genau so gut begabt wie die Jungen. Jedoch: Bei den jungen scheint die Streuung (nach oben und unten) stärker zu sein als bei den Mädchen, so daß sich das Verhältnis um so mehr zugunsten derJungen verschiebt, je höher die Anforderungen sind (denen natürlich dann insgesamt wesentlich weniger Kinder genügen). Also: Die jungen sind mathematisch begabter als Mädchen? Hier in Hamburg haben wir schon 2 Jahre hintereinander ein Verhältnis von praktisch genau 4: 1 zugunsten der jungen bei den innerhalb des Forschungsprojekts für die Förderung durch Tests ausgewählten Kindern, während sich zur Testung jungen und Mädchen im Verhältnis von etwa 5 : 2 gestellt hatten. Wir legen besonderes Augenmerk auf die gute Einbindung der Mädchen, welche gelegentlich anders auf unsere Aufgabenstellungen reagieren als die Jungen und insbesondere (im Durchschnitt) keine so große Begeisterung für das Computern aufbringen (das wir sowieso und nicht nur deswegen weitgehend aussparen).

Gutes Sozialverhalten, menschliche Reife und Ausgeglichenheit sind nicht an mathematische Hochbegabung und Reife für kognitive Prozesse gekoppelt. Wenn dann noch Lehrer und Mitschüler für die besonderen Ideen des - oft unsicheren - Außenseiters kein Verständnis zeigen bzw. ihm dies in seiner Empfindlichkeit so vorkommt, kann es sein, daß er sich als Dauerstörenfried und Hampelmann zu profilieren versucht, so daß die Verärgerung über solcherart Verhalten beim Lehrer alle anderen Regungen überlagern kann. Es sind Fälle nachweisbar, in denen Kinder mit zur absoluten Spitze zählenden IQ-Werten schließlich in der Schule für Lernbehinderte gelandet sind.

Was ist und wie mißt man mathematische Hochbegabung?

Uns stand ein leicht ins Deutsche übertragbarer amerikanischer Multiple-choice-Test zur Verfügung, den unsere Partner an der Johns-Hopkins-Universität in Baltimore/USA seit mehr als 10 Jahren mit Erfolg für die Auswahl von hochbegabten 12jährigen eingesetzt haben. Jedoch ist dieser Test auf andere Förderungsziele angelegt, als sie uns vorschwebten (nähere Informationen in [1] und [2]). Und vor allem: Es gibt den schwerwiegenden Einwand, daß ein Multiple-choise-Test uns besonders wichtige Komponenten mathematischer Begabung wie kreatives Verhalten und Zurechtfinden in hochkomplexen Situationen nicht abprüfen kann.

Wir hatten somit das Problem, einen eigenen Test zu entwickeln, welcher den amerikanischen ersetzen oder zumindest sinnvoll ergänzen konnte. Für mich selbst waren die Überlegungen, welche ich bei der Testkonstruktion anstellen mußte, sehr heilsam und anregend. Ich möchte diese deshalb dem Leser nicht vorenthalten: im Zentrum stand die Frage,

was als mathematische Hochbegabung zu verstehen ist. Jedoch können nur solche Vorgänge im Schüler einbezogen werden, welche dieser bei der Bearbeitung von geeigneten Aufgaben in Feststellbares, also insbesondere in Sprache und Zeichnungen, umzusetzen vermag. Außerdem gab es eine Reihe von Einschränkungen profaner Art: Wir hatten nur eine beschränkte Zeit, beschränkte Geldmittel und eine beschränkte Zahl von Mitarbeitern zur Verfügung. Am wichtigsten war aber die Überlegung, welches praktische Ziel denn eine solche Testung hat, nämlich diejenigen Kinder herauszufinden, welche innerhalb des Förderzeitraumes (von 3 Jahren für den 1. Jahrgang) und auch danach die beste Aussicht auf besondere mathematische Leistungen versprachen. Meine Vorüberlegungen mündeten schließlich in die folgende, für meine speziellen Zwecke geschaffene „Definition“:

Mathematische Hochbegabung ist ein Konglomerat von (abtestbaren) Eigenschaften und

Fähigkeiten eines Individuums, aufgrund dessen die Voraussage gemacht werden kann, daß dieses Individuum später und mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit ganz besondere, innerhalb der Mathematik wertvolle Leistungen erbringen wird (wenn es im mathematischen Bereich tätig wird).

Ich habe dann den folgenden (durch die Vorgaben notwendigerweise beschränkten) Katalog schon relativ komplexer mathematischer Denkleistungen zusammengestellt:

(1) Organisieren von Material;

(2) Sehen von Mustern und Gesetzen;

(3) Erkennen von Problemen, Finden von Anschlußproblemen;

(4) Wechseln der Repräsentationsebene (vorhandene Muster/ Gesetze in „neuen" Bereichen erkennen und verwenden);

(5) Strukturen höheren Komplexitätsgrades erfassen und darin arbeiten;

(6) Prozesse umkehren.

Zur Illustration wollen wir uns ansehen, wie diese Denkkategorien bei der Lösung eines speziellen Problems auftreten. Wir gehen dabei von einer Art von Aufgabenstellung aus, die ich gern in unseren Förderveranstaltungen verwende, weil dabei u. a. die Spielkomponente, die Möglichkeit zur (geometrischen) Veranschaulichung und die Möglichkeit zu kreativer Veränderung der Ausgangssituation besondere Anreize bieten.

Das Spiel „Ein-Stein" (Variante 2)

Es handelt sich um ein 2-Personen-Spiel, bei dem die Spieler A und B abwechselnd am Zug sind. Ein solcher Zug besteht darin, daß um 1 oder 2 Felder in den in der Abbildung 1 angegebenen Richtungen weitergezogen wird. Gewonnen hat, wer den letzten Zug (auf das Feld $(1,1)$) machen kann.
Das Problem besteht darin, ob A und/oder B Gewinnstrategien haben und wie dies von der Anfangsstellung (x,y) des Steins abhängt. Ideen, welche zur Lösung beitragen (können) bzw. ins Problemfeld führen:

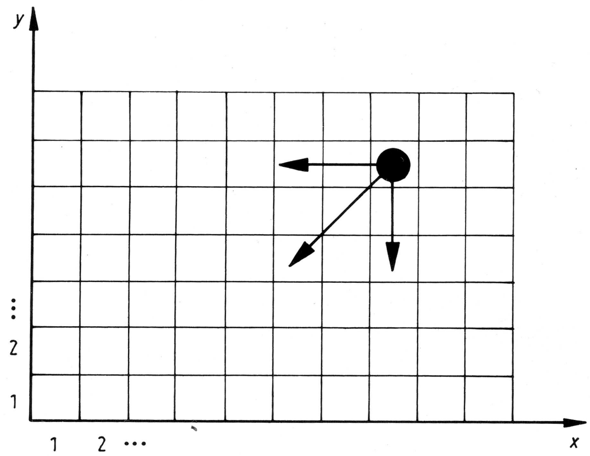

Abb. 1

- mit Kategorie (4):
  Es handelt sich eigentlich um ein NIM-Spiel mit zwei Häufchen, bei dem entweder vom ersten oder vom zweiten Häufchen oder gleichzeitig von beiden Häufchen jeweils ein oder zwei Streichhölzchen (Steinchen usw.) weggenommen werden dürfen.

- mit den Kategorien (1) und (6):
  In der Abbildung 2 ist dargestellt - und zwar „vom Punkte $(1,1)$ aus“ zusammengetragen - bei welchen Ausgangsstellungen der Spieler A gewinnt, der zu ziehen beginnt, und bei welchen B eine Gewinnstrategie hat.

- mit der Kategorie (5):
  Man erkennt, daß A genau dann gewinnt, wenn $x + y \pm \not\equiv 2 \mod 3$ ist.

- mit der Kategorie (3):
  Wie ist es, wenn man 1 bis 3 Felder in den aufgezeigten Richtungen weiterziehen darf?
  Wie ist es, wenn man das Spiel Ein-Stein auf einem 3-dimensionalen Feld spielt?
  Wie ist es, wenn man mit 2 Steinen spielt, welche nicht aufeinandergelegt werden dürfen?

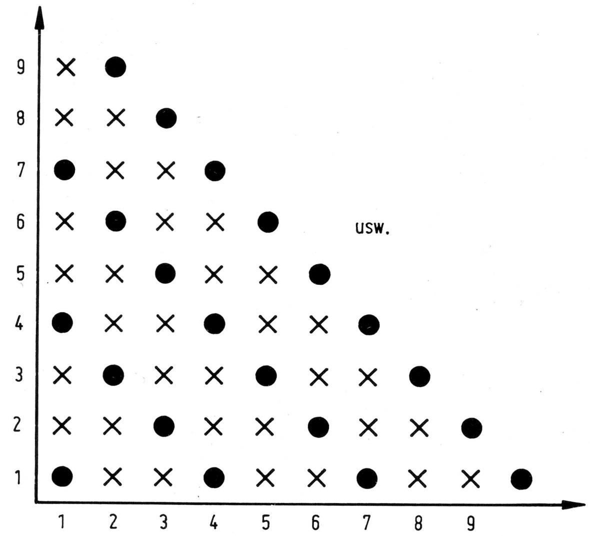

Abb. 2.

(Der Leser erkennt sicher, daß es hier noch eine große Zahl weiterer Anschlußprobleme gibt).

- mit der Kategorie (5):
  Es wird ein Computerprogramm erstellt, welches sowohl anstelle von A als auch anstelle von B optimal zieht und die Züge auf dem Bildschirm demonstriert.

Wir haben uns dann 7 Aufgaben ausgedacht, bei deren Lösung diese Denkkategorien (relativ gleichmäßig verteilt) benötigt werden, und zum „Hamburger Test für mathematische Begabung“ (HTMB) zusammengefaßt. Diese Aufgaben bewegen sich in der mathematischen Welt von Sechstkläßlern und sind offen gestellt. Die Bearbeitungszeit beträgt insgesamt 2 Stunden. Damit der Leser ein Gefühl für die Leistungsfähigkeit der bei der Testuntersuchung erfolgreichen 12jährigen Schüler bekommt, werde ich eine Testaufgabe aus dem Reservoir des HTMB vorstellen, die einer dieser 7 Aufgaben sehr ähnlich ist und „auf die Kategorien (5) und (6) lädt“. Die Formulierung hat die gleiche Ausführlichkeit, wie sie für die Kinder vorgesehen ist.

Aufgabe: Für jede natürliche Zahl n soll A (n) die „alternierende Quersumme“ sein. Beispiele:

$$n = 571 \qquad A(n) = 1 - 7 + 5 = -1$$

$$n = 1027 \quad A(n) = 7 - 2 + 0 - 1 = 4$$

Jeder natürlichen Zahl n kann man dann durch die folgende Vorschrift eine Zahl $f(n)$ zuordnen: Zuerst berechnet man A (n). Anschließend erhält man $f(n)$ aus

$$f(n) = (n - A(n)) : 11.$$

Beispiel:
$n = 1027$
$f(n) = f(1027) = (1027 - A(1027)) : 11 = (1027 - 4) : 11 = 93.$

Den Übergang von n zu $f(n)$ bezeichnet man als Schritt. Man stellt fest, daß stets nach einer endlichen Anzahl von Schritten die Zahl 0 erreicht wird. Beispiele:
$n = 89$

$$\left.\begin{array}{lcl} f(89) = & (89-1):11 = & 8 \\ f(8) = & (8-8):11 = & 0 \end{array}\right\} \text{2 Schritte}$$

$n = 571$

$$\left.\begin{array}{lcl} f(571) = & (571+1):11 = & 52 \\ f(52) = & (52+3):11 = & 5 \\ f(5) = & (5-5):11 = & 0 \end{array}\right\} \text{3 Schritte}$$

Du siehst, daß in diesen beiden Beispielen die Anzahl der bis zum Erreichen der Null benötigten Schritte gleich der Anzahl der Ziffern der Ausgangszahl ist. Solch Ausgangszahlen sollen „folgsame Zahlen“ heißen. Leider sind nicht alle Zahlen folgsam. Beispiel:

$n = 1029$

$$\left.\begin{array}{lcl} f(1029) = & (1029-6):11 = & 93 \\ f(93) = & (93+6):11 = & 9 \\ f(9) = & (9-9):11 = & 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{3 Schritte für eine} \\ \text{4stellige Zahl}\end{array}$$

Deine Aufgabe besteht darin, die größte vierziffrige Zahl zu finden, welche nicht folgsam ist. Für die Begabtenauswahl wurden von uns beide Tests, also der HTMB und die deutsche Übersetzung des schon erwähnten amerikanischen Tests, benutzt. Die Kinder arbeiteten daran - mit einer nur kurzen Zwischenpause - insgesamt 3 Stunden. Es war faszinierend zu sehen, wie intensiv in der Regel auch am Ende dieser Zeit noch nachgedacht wurde, so daß neben den mathematischen Fähigkeiten auch Durchhalte- und Konzentrationsvermögen nachgewiesen war.

Nachträglich wurden die von uns für die Förderung ausgewählten Kinder einer IQ-Bestimmung unterzogen. Das Ergebnis: ein durchschnittlicher IQ-Wert von mehr als 140 und eine weitere Bestätigung dafür, daß unsere Kinder alles andere als nur einseitig mathematisch begabt sind.

Das Förderkonzept des Hamburger Modells

Zur Organisation

Die andersartigen schulorganisatorischen Vorgaben verbieten uns die Übernahme des in Baltimore praktizierten Förderkonzepts, innerhalb dessen die Lehrstoffe spätere Jahrgungsstufen vorab und im Schnellverfahren bewältigt werden. Damit erübrigt sich eine eingehende Diskussion der Vor- und Nachteile eines solchen Vorgehens. In unserem Hamburger Projekt wird zusätzlich zum üblichen Mathematikunterricht gefördert. Dabei wird so weit wie möglich vermieden, diesen in irgendeiner Form zu tangieren und Schulstoff vorwegzunehmen. In Baltimore gibt es verschiedene Organisationsformen. Insbesondere werden dreiwöchige Kompaktkurse in den dort sehr langen Sommerferien durchgeführt. In Hamburg ist am Samstag schulfrei. Dies erweist sich als Glücksfall, denn so können unsere Förderveranstaltungen an einem Tag stattfinden, an dem die Kinder keine schulischen Verpflichtungen haben.

In unseren Normalveranstaltungen ist zuerst ab 9.15 Uhr Plenum, in dem vor allem der neue Problembereich vorgestellt wird. Danach arbeiten unsere Kinder in kleinen Tutorengruppen von etwa 12 Schülern, wobei sich in der Regel dann noch kleinere Untergruppen bilden, recht selbständig und in weitgehender Selbstbestimmung. Zum Abschluß werden ab 12 Uhr und wieder im Plenum zusammenfassende und weiterführende Informationen zum bearbeiteten Problembereich gegeben.

In loser Folge und gelegentlich werden am Samstagmorgen auch Sonderveranstaltungen angeboten: Vorträge (das Leben Leonhard Eulers, Kunst und Computer, Beruf und Hobby: Primzahlen, Zahlwort und Ziffer), zu denen auch die Eltern eingeladen werden und welche den Horizont erweitern sollen; Spielvormittage und gemeinsame Fahrten in ein Jugendheim zur Ausbildung von sozialen Kontakten; Redaktionskonferenzen für die projekteigene Zeitung. Der pädagogische und mathematikdidaktische Aspekt

Unsere Kinder sollen in freundlicher und motivierender Umgebung - und mit Spaß an der Sache - ihren mathematischen Betätigungsdrang an geeignet anspruchsvollen Materialien ausleben können. Jede neue Veranstaltung bringt auch ein neues Thema. Hausaufgaben werden nicht gestellt. „Klausurarbeiten“ gibt es auch nicht. Unsere Kinder können also unbelastet und erwartungsvoll zu unseren Veranstaltungen kommen.

Im Zentrum unserer Bemühungen steht, den Kindern Vorgaben, Anregungen und Anreize für mathematisches Tun zu liefern. Daß dabei auch Stoffwissen erworben wird, ist ein nicht forciertes, aber mit einer gewissen Selbstverständlichkeit eintretendes Nebenergebnis. Wir versuchen, im elementarmathematischen Bereich Situationen zu simulieren, wie sie in der mathematischen Forschung auftreten. So wird insbesondere auch die kreative Komponente mathematischer Begabung gefordert und gefördert. Forschungssituationen sind offen. Man weiß nicht, was man herausbekommen wird und in welcher Richtung die Ergebnisse liegen werden. Und man muß sich in der Regel damit abfinden, daß sich Fragen auftun, deren Beantwortung zumindest im Moment nicht erfolgen kann. Unsere Kinder haben erstaunlicherweise keine Schwierigkeiten damit, daß manches erst einmal unerledigt bleiben muß.

Es geht uns darum, daß unsere Kinder geeignete Verhaltens- und Handlungsmuster ausbilden und verbessern, im kognitiven Bereich z. B. heuristische Strategien wie ›Probleme sehen‹,

›Repräsentationen variieren‹und ›Superzeichen bilden‹(siehe [3]). Wer sich näher mit Problemlöseprozessen bzw. allgemeiner mit produktiven Prozessen in der Mathematik befaßt hat, der weiß, daß man sich auch um den affektiven und sozialen Bereich kümmern muß. Wir streben deshalb z. B. auch an, daß unsere Kinder höhere Erfolgswahrscheinlichkeiten erleben, wenn sie risikobereit sind, und daß sie sich als duldsam erweisen, wenn im ersten Anlauf Fehler gemacht werden, und zwar gegenüber anderen und auch bei sich selbst.

Unser Konzept erweist sich auch deshalb als erfolgreich, weil wir die Entsprechungen zwischen kreativem mathematischen Tun und dem Spielen stets im Blick haben, sowohl bei der Vorgabe der Problembereiche als auch bei der Arbeit in den Kleingruppen. In der Heckhausenschen Charakterisierung des Spielens bildet der Aktivierungszirkel einen der Eckpfeiler. Gemeint ist der regelmäßige Wechsel zwischen (erträglich hoher) Anspannung und (erlösender) Entspannung, wie er z. B. beim Versteckenspielen auftritt. Beim mathematischen Tun erhält man solche Aktivierungszirkel, wenn man in regelmäßiger Folge (entspannende) Erfolgserlebnisse hat, aus denen sich dann jeweils neue und anregende Perspektiven ergeben. Die „Erfolgsdichte“, das ist die Zahl der Ideen bzw. der einzelnen Aktivierungszirkel pro Zeiteinheit, ist nach meiner Erfahrung ein ganz wichtiges Maß für die Qualität der vorgegebenen Materialien und der durch diese bewirkten Denkprozesse. Hohe Erfolgsdichte bedeutet viel Spaß und Motivation.

Die von uns betreuten Kinder sind hinsichtlich ihrer Testleistungen und der dadurch nachgewiesenen Begabung ihren Altersgenossen um mehr als 4 Jahre voraus. Als 12jährige waren sie besser als durchschnittliche 16jährige Gymnasiasten. Beeindruckend ist vor allem der Ideenreichtum unserer Kinder. Jedoch ist das Formulierungs- und Formalisierungsvermögen nicht im gleichen Maße entwickelt. Wir machen trotzdem und ganz absichtlich keine Stilübungen. Abgesehen davon, daß diese den Spaß verderben - die Kinder kommen freiwillig und gern zu uns, und dies soll auch so bleiben -, vertrauen wir darauf, daß der Zwang zu einer einigermaßen korrekten Formulierung, wenn man sich einem Gesprächspartner in den Kleingruppen mitteilen will, das Seine tut. Außerdem animieren wir unsere Kinder, kleinere Artikel für die regelmäßig erscheinende projekteigene Zeitung zu schreiben.

Wir rotieren nicht mit unserer Themenauswahl innerhalb der Mathematik allein, sondern wir suchen stets auch Anbindungen nach draußen. So gibt es gerade im elementarmathematischen Bereich viele Anlässe, die Entstehungsgeschichte der tragenden Ideen einzubeziehen. Die Umwelt gibt Anstöße zu Mathematisierungen. Spiele geben Anregungen, Gewinnstrategien zu suchen. Und daß Mathematik auch eine ästhetische Dimension hat, empfinden unsere Kinder, wenn man ihnen die dazu geeigneten Materialien vorstellt.

Informationen über die für das Hamburger Modell entwickelten Arbeitsmaterialien[1]

Problemkreise erhält man im Idealfall dadurch, daß man (nur) ein geeignetes Ausgangsproblem vorgibt, nach dessen Lösung sich dem Ideenreichtum der Kinder wie selbstverständlich

[1] Es ist beabsichtigt, einen ersten Band mit unseren Materialien im Herbst 1985 herauszubringen. Für den Fall, daß sich hinreichend viele Interessenten schon vorher melden, könnte dies in eigener Regie und deshalb relativ preiswert geschehen.

Anschlußprobleme anbieten, von denen sich die Kinder die interessantesten für ihre weitere mathematische Arbeit aussuchen. Das Ausgangsproblem sollte sich - ebenfalls im Idealfall - in Umwelt- oder Phantasiesituationen oder in die Geschichte anregend einbinden lassen und verschiedene Lösungen ermöglichen. Seine Formulierung sollte implizit eine große Zahl von „Dimensionen der Veränderung“ enthalten und der dadurch weitgehend vorgegebene und zugehörige Problemkreis sollte reichhaltig an mathematischen Zusammenhängen sein.

Gelegentlich habe ich jedoch unseren Kindern auch stärker vorstrukturierte Aufgabenstellungen und Materialien vorgegeben. Diese bieten sich an, wenn man wichtige Denkleistungen wie das Wechseln von Repräsentationen oder das Erkennen von Mustern bevorzugt trainieren will.

Bei der Konstruktion und Formulierung der Arbeitsmaterialien achte ich darauf, daß - im Sinne des letzten Abschnitts - eine hinreichende Erfolgsdichte gewährleistet ist, wozu die meisten Zwischenprobleme einen für unsere Kinder nur mittleren Schwierigkeitsgrad haben dürfen. Außerdem versuche ich, die Materialien so zu fassen, daß die Spiel- und die Ästhetikkomponente berücksichtigt werden, daß das Neuigkeitsmoment gegeben ist und daß das Problemfeld hinreichende mathematische Relevanz hat.

Natürlich kann man nicht vermeiden, daß solches Arbeitsmaterial neben den positiven Ausprägungen irgendwo auch Mängel gegenüber einem derartigen Gesamtkatalog von Idealforderungen aufweist. Dies gilt auch für das folgende Beispiel, das ich primär deshalb für diesen Artikel ausgesucht habe, weil sich bei ihm an das Ausgangsproblem ein mathematisch sehr reichhaltiges Problemfeld anschließt und weil unsere Kinder an derart „anschaulichen“ Aufgabenstellungen besonders gern und erfolgreich arbeiten. Die Formulierung belasse ich in der Originalfassung, wie sie die Kinder unseres 1. Jahrganges in der 23. Sitzung des 1. Förderjahres am 26. 5. 84 in die Hand bekamen (diese Kinder befanden sich in der Schule in der Regel in der Klassenstufe 7).

1. Das Ausgangsproblem

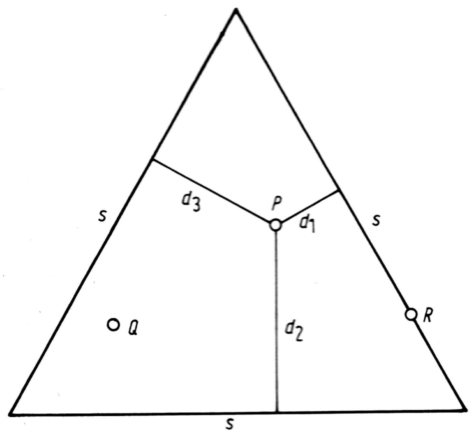

Abb. 3

Peter macht eine Entdeckung. Dazu zeichnet er zuerst ein gleichseitiges Dreieck. Dann markiert er im Innern bzw. auf dem Rand eines Dreiecks die Punkte P, Q und R und bestimmt deren Abstandssummen

$$d_1 + d_2 + d_3$$

von den drei Seiten dieses Dreiecks. Uns siehe da: diese Abstandssummen haben stets den gleichen Wert (Abb. 3).

Stolz erzählt Peter diese Entdeckung - und zwar als mathematischen Satz für alle Punkte eines gleichseitigen Dreiecks - seiner Schwester Christiane. Doch diese ist etwas älter und mathematikerfahrener. Deshalb kommt prompt von ihr Kritik: »Im Dreieck liegen unendlich viele Punkte. Diese kannst Du nicht alle durchprobieren. Also mußt Du Dir einen Beweis einfallen lassen.«

Peter fühlt sich zwar einen Moment lang ungerecht behandelt. Aber er muß den Einwand - nach kurzer Überlegung - akzeptieren. Sein Problem ist auch Dein Problem:
Wie kann der Beweis für Peters Entdeckung geführt werden?
Arbeite im zugehörigen Problemfeld!

Nimm Dir am Anfang hinreichend viel Zeit, um eine Reihe von verschiedenartigen Anschlußproblemen zu formulieren. Sollte Dir bei der Arbeit an einem dieser Probleme - so nebenbei - ein weiteres einfallen, so halte es durch eine kurze Notiz fest. Wir wollen in der Abschlußbesprechung zur heutigen Sitzung auch die für Dich noch offenen Probleme aus dem Problemkreis zusammenstellen.

Das Ausgangsproblem kann auf verschiedene Weise gelöst werden. Ich begnüge mich damit, die wesentlichen Beweiselemente für die beiden in unserem Zusammenhang wichtigsten Beweise anzugeben.

Beweis 1

Hierbei wird eine Kette von Vereinfachungen benutzt:

P im Innern $\rightarrow$ P auf dem Rand $\rightarrow$ P in einem Eckpunkt. Aus der Gleichseitigkeit des Dreiecks folgt die „einheitliche Höhe“ und damit die Richtigkeit für den einfachsten Fall. Dann zeigt man unter Zuhilfenahme der nebenstehenden Skizze, daß die Abstandssumme auch dann gleich dieser einheitlichen Höhe ist, wenn P auf dem Rand liegt.

Und schließlich führt man die Richtigkeit der allgemeinsten Aussage auf diesen Sonderfall zurück (Abb. 4).

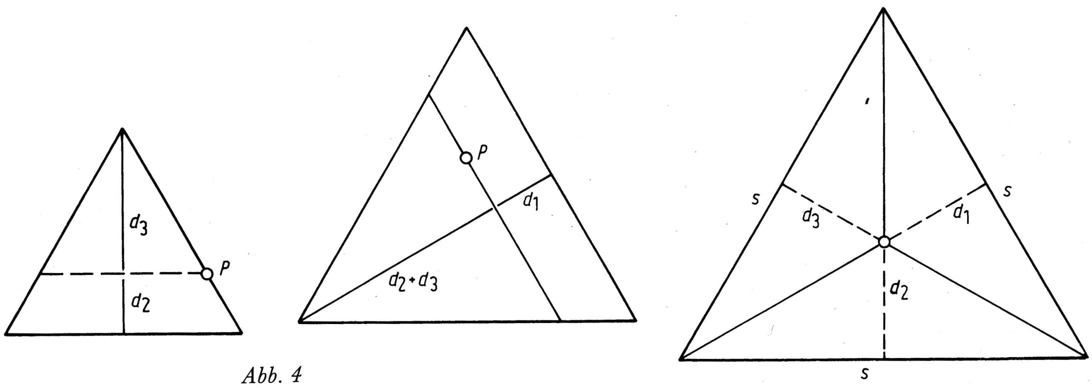

Abb. 4

Beweis 2

Der Flächeninhalt des vorgegebenen Dreiecks errechnet sich zum einem zu

$$F = \frac{s \cdot h}{2}$$

und zum anderen zu

$$F = \frac{d_1 \cdot s}{2} + \frac{d_2 \cdot s}{2} + \frac{d_3 \cdot s}{2},$$

woraus unmittelbar $d_1 + d_2 + d_3 = h$ folgt.

Die Reichhaltigkeit des durch unser Ausgangproblem gleichzeitig mit vorgegebenen Problemfeldes wird aus der Vielzahl und Verschiedenartigkeit der „Dimensionen der Veränderung“ ersichtlich. Solche Dimensionen sind:

(1) Betrachtung aller Dreiecke,

(2) Betrachtung der regelmäßigen n-Ecke,

(3) Betrachtung aller n-Ecke.

(4) Verlegung des Punktes P nach draußen.

(5) Betrachtung der 3-dimensionalen Analogie gleichseitiges Tetraeder.

(6) Vor allem bei Körpern: welche Abstände (von Ecken, Kanten, Flächen)?

(7) Betrachtung von regelmäßigen Körpern (platonischen Körpern),

(8) Betrachtung allgemeinerer Körperklassen, bei denen so etwas wie Abstandssummenbildung sinnvoll ist.

(9) Andere Fragestellung: welche Flächen bzw. Körper sind durch Abstandssummenkonstanz charakterisiert?

Unsere Kinder haben u. a. gefunden:

- in allen Einzelgruppen den Beweis 1, nirgends den Beweis 2 (womit ihren weiteren Überlegungen eine bestimmte Richtung und Beschränkung gegeben war);
- daß die Abstandssummenkonstanz gewahrt bleibt, wenn man für Punkte P außerhalb des Dreiecks geeignete Vorzeichenregeln einführt (Abb. 5), wenn man die Halbebenen, welche durch die Begrenzungsgeraden des Dreiecks gebildet werden, geeignet unterscheidet;
- daß andere Dreiecke und die Abstände von den Ecken nichts bringen;

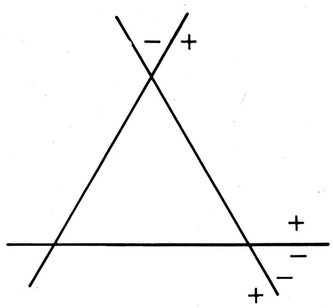

Abb. 5

- daß der gefundene Beweis 1 sehr schön - und mit einem Kettenglied mehr - auf das gleichseitige Tetraeder übertragbar ist, wenn man die Abstände von den Begrenzungsflächen (und nicht die von den Kanten) betrachtet;
- daß jede senkrechte Säule über einer Fläche mit Abstandssummenkonstanz (von den Kanten) selbst abstandssummenkonstant (von den Flächen) ist (ein Ergebnis, das mich freudig überraschte, da ich vorher nicht an diese Konstellation gedacht hatte).

Für den Leser ist sicher die Frage interessant, wie ich an die Materialien für unsere bisher mehr als 40 Sitzungen gekommen bin und wie ich die weiteren mehr als 20 zu finden bzw. zu konstruieren gedenke. In gewisser Weise ist dabei Polya für mich das große Vorbild ([4], [5]). Habe ich kein geeignetes Material aus meinem eigenen Repertoire zur Verfügung ([6]), hole ich mir Anregungen aus Aufgabensammlungen oder von Autoren ›mathematischer Edelsteine‹([7], [8]). Meine Arbeit besteht dann darin zu prüfen, ob jeweils geeignete Problemumfelder möglich sind. Gelegentlich produziere ich jedoch auch selbst neue und für unsere Zwecke passende Problemstellungen. Eine solche sei hier zum Abschluß und in Kurzform angegeben (die Fassung für unsere Kinder ist wesentlich ausführlicher). Sie sagt mir u. a. deshalb zu, weil sie Umwelt- und Geschichtsbezüge aufweist und eine Mathematisierung benutzt, an der die Kinder variieren können.

2. Problemfeld „Skalenzahlen“

Beobachtung: Zur Einteilung (Zeit, Winkel, Geld usw.) wurden früher und werden vielfach noch heute Zahlen wie 60, 12, 20, 360, 6 und 144 benutzt, jedoch nicht Zahlen wie 5, 7, 25 usw. Dies hängt offensichtlich damit zusammen, daß solche „Skalenzahlen“ relativ viele Teiler besitzen.

Definition: Der Wert von n für einen Gebrauch als Skalenzahl sei festgelegt durch

$$w(n) = \frac{(a(n) - 1)^2}{n}$$

wobei $a(n)$ die Anzahl der Teiler von n ist. n heiße Skalenzahl genau dann, wenn $w(n) \geq 1$ gilt.

Probleme:

Gesucht sind Aussagen über (diese) Skalenzahlen (Anzahl, größte Skalenzahl, größter Wert $w(n)$).

Welche (sinnvollen) Möglichkeiten der Variation der Definition gibt es, damit auch die 10 eine Skalenzahl wird? Soll überhaupt unsere Definition auch die 10 als Skalenzahl ausweisen?

Entwickle geeignete Verfahren zur schnellen Bestimmung der $w(n)\ldots$

Literatur

[1] K. Kiesswetter: *Förderung mathematisch Hochbegabter.* - Spektrum d. Wissenschaft 1984 Nr. 5.

[2] K. Kiesswetter - W. Griesing: *Bericht über das Hamburger Forschungsprojekt »Identifizierung und Förderung von mathematisch besonders befähigten Schülern«.* In: Heitzer u. a.: *Hochbegabte in unserem Bildungssystem.* - Braunschweig: Intern. Arbeitskreis Sonnenberg 1984.

[3] K. Kiesswetter: *Modellierung von Problemlöseprozessen.* - MU 29 (1983) H. 3 S. 71ff.

[4] G. Polya: *Mathematik und plausibles Schließen. Bd. 1, 2.* - Basel: Birkhäuser 1962.

[5] G. Polya: *Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Bd. 1, 2.* - Basel: Birkhäuser 1962.

[6] K. Kiesswetter- R. Rosenkranz: *Das Problem der verschneiten Straßen.* - MU 28 (1982) H. 5 S. 5 ff.

[7] A. H. Beiler: *Recreations in the Theory of Numbers.* - New York: Dover 1966.

[8] R. Stowasser - B. Mohry: *Rekursive Verfahren.* - Hannover: Schroedel 1978.

[Aus: MNU 38 (1985) 300 - 306]